Section A1 (programme M')

# MATHEMATIQUES I

**Durée : 4 heures**

---

## Préliminaires

1° Toutes les fonctions considérées sont à valeurs réelles.

2° Une fonction $f$ définie sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est dite de classe $C^1$ si elle est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, la dérivée $f'$ étant continue sur $]a, b[$ et se prolongeant continûment à $[a, b]$.

3° Une fonction $f$ définie sur un intervalle compact $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ est dite de classe $C^1$ par morceaux s'il existe une subdivision $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ de $[a, b]$ telle que la restriction de $f$ à chacun des intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ soit de classe $C^1$.

Dans ce cas $f'$, définie sur le complémentaire dans $[a, b]$ d'un ensemble fini, est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ et on admettra que la formule :

$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$ reste valable sous ces hypothèses.

4° On note F (resp. E) l'ensemble des fonctions $f$ de classe $C^1$ (resp. de classe $C^1$ par morceaux) définies sur $[0, 1]$ telles que

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f'(x) = 0.$$

5° $a$ étant dans tout le problème un réel fixé dans $]0, 1[$, $\hat{F}$ (resp. $\hat{E}$) désigne l'ensemble des fonctions $f$ de F (resp. E) telles que

$$\forall x \in [0, a], \quad f(x) \geqslant 1.$$

6° $\alpha$ étant une fonction continue sur $[0, 1]$, strictement positive sur $]0, 1]$, on note, pour tout élément $f$ de E,

$$\Phi(f) = \int_0^1 [f'(x)]^2\, \alpha(x)\, dx.$$



## I

1° Soit $\varphi$ un élément de E. On prolonge $\varphi$ à $[0, \infty[$ en posant

$$\forall x > 1 \qquad \varphi(x) = 0.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 1 . \quad \forall x \in [0, 1], \quad \varphi_n(x) = n \int_x^{x + \frac{1}{n}} \varphi(t)\, dt.$$

*a.* Montrer que :

- pour tout $n \geqslant 1$, $\varphi_n$ est de classe $C^1$
- $(\varphi_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers $\varphi$ sur $[0, 1]$ quand $n$ tend vers l'infini
- $\exists M \quad \forall x \in [0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 1, \quad |\varphi'_n(x)| \leqslant M$
- $\lim_{n \to \infty} \int_0^1 |\varphi'_n(x) - \varphi'(x)|\, dx = 0.$

*b.* En déduire l'existence d'une suite $(\psi_n)_{n \geqslant 1}$ d'éléments de F telle que $(\psi_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément vers $\varphi$ sur $[0, 1]$ quand $n$ tend vers l'infini et

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(\psi_n) = \Phi(\varphi).$$

2° Montrer que

$$\operatorname{Inf}_{\varphi \in \hat{E}} \Phi(\varphi) = \operatorname{Inf}_{\varphi \in \hat{F}} \Phi(\varphi).$$

## II

1° On suppose qu'il existe une fonction $g$ vérifiant

$$(*) \qquad g \in \hat{E} \quad \text{et} \quad \Phi(g) = \operatorname{Inf}_{\varphi \in \hat{E}} \Phi(\varphi).$$

.../...

- 28 -
ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE
1973

*a.* Montrer

$$\forall x \in [0,1] \ , \ g(x) \leqslant 1$$

(Considérer $b = \text{Sup}\ \{ x \in [0,1] \ ; \ g(x) \geqslant 1 \}$ et la fonction $\gamma$ :

$$\forall x \in [0,b] \quad \gamma(x) = 1$$
$$\forall x \in ]b,1] \quad \gamma(x) = g(x).)$$

*b.* Montrer

$$\forall \varphi \in E \ , \quad (\forall x \in [0,a] \ \varphi(x) \geqslant 0) \Rightarrow \int_0^1 \varphi'(x)\, g'(x)\, \alpha(x)\, dx \geqslant 0.$$

(Considérer la fonction $g + \varepsilon\varphi$.)

*c.* Démontrer

$$\forall \varphi \in E \ , \quad (\forall x \in [0,a] \quad \varphi(x) = 0) \Rightarrow \int_0^1 \varphi'(x)\, g'(x)\, \alpha(x)\, dx = 0$$

et en déduire que $g'\alpha$ est définie et constante sur $]a,1[$.

2° Déduire de ce qui précède qu'il existe une et une seule fonction $g$ vérifiant (*).

3° Calculer

$$\operatorname{Inf}_{\varphi \in \hat{F}} \Phi(\varphi).$$

4° Soit

$\hat{H} = \{ f \in \hat{E} \ ; \ f'\alpha$ est décroissante sur son ensemble de définition $\}$.

Montrer

$$\forall x \in [0,1] \qquad g(x) = \operatorname{Inf}_{f \in \hat{H}} f(x).$$

## III

On pose

$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 < 1 \},$$
$$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1 \},$$
$$\overline{D} = D \cup C.$$



G désigne l'ensemble des fonctions $f$ continues sur $\overline{D}$, nulles sur C, admettant des dérivées partielles premières sur D continues sur D et se prolongeant continûment à $\overline{D}$. On note encore $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ les prolongements. On pose

$$\hat{G} = \{ f \in G \ ; \quad \forall (x,y) \in D \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant a \Rightarrow f(x,y) \geqslant 1 \}.$$

Pour un élément $f$ de G, on pose :

$$\Psi(f) = \iint_{\overline{D}} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] (x,y)\, dx\, dy$$

et $\forall (x,y) \in \overline{D} \quad \hat{f}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x\cos\theta - y\sin\theta \ , \ x\sin\theta + y\cos\theta)\, d\theta.$

1° Montrer que, si $f$ appartient à G, alors $\hat{f}$ appartient à G et il existe $v$ dans F tel que

$$\forall (r,\theta) \in [0,1] \times \mathbb{R} \qquad \hat{f}(r\cos\theta \ , \ r\sin\theta) = v(r).$$

2° Montrer

$$\forall f \in G \quad \Psi(\hat{f}) \leqslant \Psi(f).$$

3° On considère $\Phi$, défini dans les préliminaires, associé à la fonction $\alpha$ particulière suivante :

$$\forall x \in [0,1] \qquad \alpha(x) = x.$$

Montrer que

$$\operatorname{Inf}_{f \in \hat{G}} \Psi(f) = 2\pi \operatorname{Inf}_{v \in \hat{E}} \Phi(v).$$

4° Calculer en fonction de $a$ la valeur de

$$\operatorname{Inf}_{f \in \hat{G}} \Psi(f).$$

Cette borne inférieure est-elle atteinte pour un élément particulier $f$ de $\hat{G}$ ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail